

## 土木構造物における3次元解析、動的解析、非線形解析など 解析技術適用の事例とその効果

# 幾何学的非線形解析の概論と 簡単な応用としての擬似管の座屈解析

(株) フォーラムエイト 福岡営業所 井口 真一

### 1. はじめに

非線形解析が実設計に取り入れられるようになって久しい。ここでの非線形が意味するものは、幾何学的に起因するものと材料に起因するものとがあるが、昨今の実務の世界では材料の非線形挙動をさす場合が多い。またこの場合、幾何学的にはほとんど線形として扱われている。しかしながら、逆L型の橋脚のように端部の挙動が基部に比べ極端に大きく発生する構造系などでは、幾何学的な非線形性を考慮しなければ現実とかけ離れた挙動結果となる場合がある。また、柔なラティスドーム構造系などでは、弾性座屈による極端な変形性状が得られ、かつ同じ荷重条件、変位条件においても多数の分岐解が存在する。

連載2回目の今回は、幾何学的非線形解析の利用方法を主として計算概論、代表的な座屈解析として長柱問題、簡単な応用として管の座屈解析を紹介させていただき、併せて、理論解と計算結果を比較し本解析プログラムの妥当性と優位性を検討する。ここでは、弊社3次元非線形解析ソフト「UC-win/FRAME(3D) Ver.1.06」を用いる。

### 2. 接線剛性方程式

座屈解析には、座屈後領域の解析もカバーできるように、幾何剛性を導入した接線剛性方程式の作成が欠かせない。

まず、基準座標系表示された節点力と要素座標系表示された要素力の関係を表す平衡条件式は、

$$U = JS \quad (1)$$

と表され、変分原理から

$$\delta U = J \delta S + JS \quad (2)$$

$\delta S$ 、 $\delta J$ の共通座標系における変位成分  $\delta u$ を取り出せば、先行状態からの節点力と変位の微小増分間の関係式としての、接線剛性方程式が以下のように得られる。

$$\delta U = (K_0 + K_G) \delta u = K_T \delta u \quad (3)$$

ここに、

- $U$  : 節点力マトリックス
- $J$  : 座標変換マトリックス
- $S$  : 要素力マトリックス
- $K_0$  : 要素剛性マトリックス
- $K_G$  : 幾何剛性マトリックス
- $u$  : 節点変位マトリックス

ここで、材料の非線形性を考慮する場合は、材料剛性による  $K_0$  マトリックスが非線形性を呈するも

のによって置き換わる。

### 3. 長柱問題

一般に座屈解析では長柱問題が例としてよく扱われ、長柱での座屈の定義は、「圧縮により安定性を失い圧縮方向と垂直方向に大きくはらみだすこと」とされている。

この座屈時の荷重、すなわち座屈荷重は、微小要素のモーメント釣合い式と境界条件から理論解が次式のように求められる。

$$P_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4)$$

ここに、

$n$  : 次数

$EI$  : 曲げ剛性

$\ell$  : 要素自然長

ここでは、実際に計算によって、1次、2次モードそれぞれの座屈形状を発生させ、そのとき得られる荷重-変位関係から座屈点を特定し、事前に求めた理論解との比較によって精度比較を行う。

#### 3. 1 解析モデル

ここでは、以下の諸元を持つ単純梁モデルを用いる。

$$E = 2.00 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$A = 1.2500 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = 4.17 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\ell = 2.0 \text{ m}$$

ただし、解析上の注意として、単純梁のようなシンプルな構造系では、単純に軸力のみを座屈荷重まで与えても座屈は発生せず、単純に押しつぶされた解析しかできない。そのため、実際に手で「ものさし」などを座屈させるのと同様に、軸力と部材を偏心させるもととなる撓乱力の導入が必要となる。この撓乱力は、座屈荷重に影響を与えない小さな面外方向の外力であり、例えば座屈荷重の1/1000くらいの荷重で十分であり、かつ、この値の微妙な違いや、与えるステップの違いで上に凸なモード、下に凸なモードと異なった解が得られることになる。

#### 3. 2 計算結果

計算結果をまとめれば以下のようになる。

#### 1次モード

理論解 **20.56 kN**

計算結果 **20.62 kN**

計算結果 / 理論解 = **1.003**

#### 2次モード

理論解 **82.56 kN**

計算結果 **82.50 kN**

計算結果 / 理論解 = **0.999**

ここでは、計算幅の問題もあるが、1次モード、2次モードともに計算結果と理論値は良く合っている。図-1、図-2に各モードの変位図を示す。また、図-3の荷重-変位曲線からもわかるように明確な座屈位置を確認することが可能である。

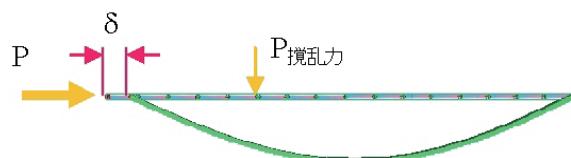


図-1 1次モード(実変位)



図-2 2次モード(実変位)

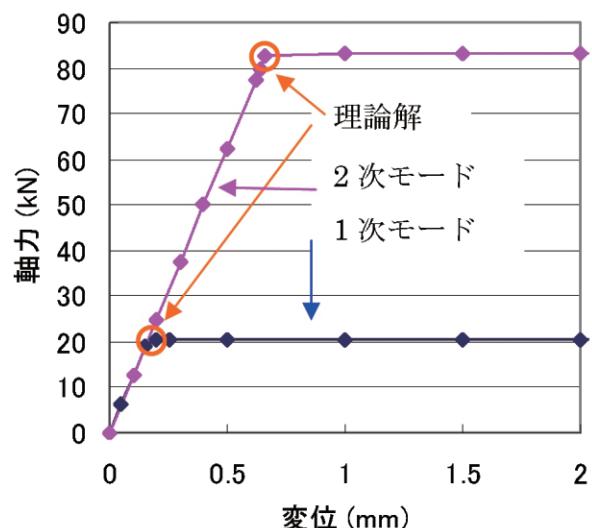


図-3 荷重-変位関係

### 4. 2次元部材の解析と理論解の比較

2次元部材の問題として鋼管を短く切り取った形状のリングに周面荷重を載荷し座屈解析を試みる。

#### 4. 1 解析モデル

解析モデルは、図-4にある直径5m、部材断面314mm×25mmの鋼材を用い、部材弱軸が円中心方向に直角となるよう配置する。また、支点条件は、主座屈解モードとなる変形のみを考慮した条件としている。

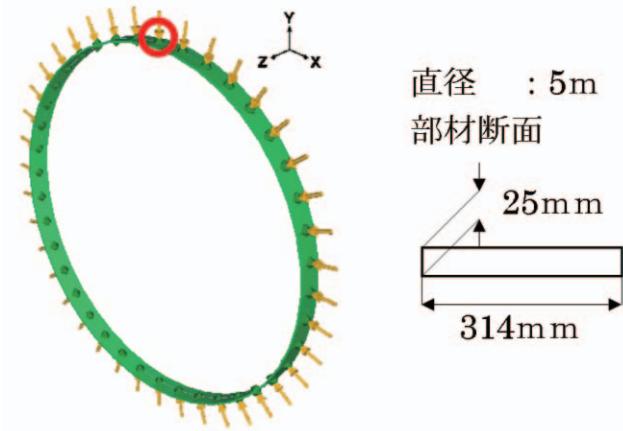


図-4 2次元リングモデルと載荷状態

##### 支点条件

鉛直直径軸回り(上下端2節点)

##### 並進条件

Z-X 方向拘束

##### 回転条件

全方向フリー

水平直径軸回り(左右端2節点)

##### 並進条件

Y-Z 方向拘束

##### 回転条件

全方向フリー

2次元リングモデルも同様に計算によって、主座屈モードを発生させ、そのときの荷重-変位関係から座屈点を特定し、事前に求めた理論解との比較を行う。

ただし、図-4のように、単に外力を放射線状に節点荷重として与えた場合、座屈荷重まで与えても座屈は発生せず、単純に相似形のまま押しつぶされる解析しかできない。そのため、1次元モデルと同様に、搅乱力をクラウン部(丸印)に与えている。

#### 4. 2 計算結果

本解析は、座屈時、座屈後の状態も安定した計算が可能であった。

図-5の荷重-変位図と集中荷重へ換算した理論解の比較から、荷重-変位曲線の1次勾配領域から2次勾配へ推移し始める点と理論解が一致していることが確認できる。また、座屈後は、僅かな荷重増加で大きな変位が発生するが、図-6は、実変位での変形図であり、最下端部が1230mm変位した状態を表示している。

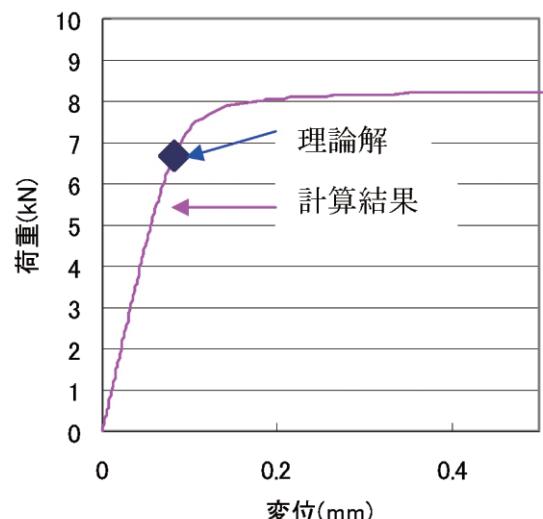


図-5 荷重-変位曲線

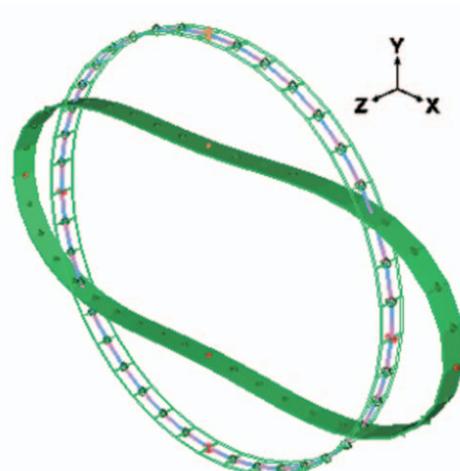


図-6 変形図(実変位)

#### 5. 3 次元部材での座屈評価

ここでは、2次元問題で使用したリングに単純に長さを持たせた擬似管モデルの座屈解析、次に一端固定、他端自由とした境界条件下での座屈解析を行う。

##### 5. 1 両端変形可能拘束モデル

###### a. 解析モデル

解析モデルは、図-4にある直径5m、部材断面314mm×25mmの鋼材を管形状となるようZ方向へ

継足しつつ同部材で格子組を行い、長さ 4m の管形状を作成する。支点は、4.1 節で用いた拘束条件を、擬似管の両端断面上で設定する。荷重も同様に 2 次元リングモデルと同じ荷重をリング形成節点に載荷する。搅乱力は、管長さ方向の中央部のクラウン部に与える。

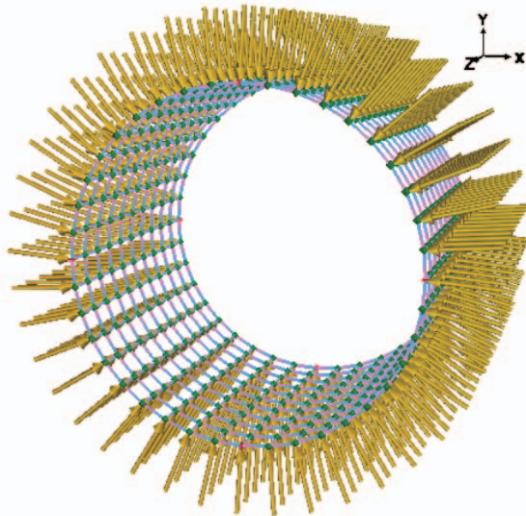


図-7 擬似管モデルと載荷状態

#### b. 計算結果

本解析も 2 次元リングモデルと同様に、座屈時、座屈後の状態も安定した計算が可能であった。

図-7 手前のクラウン部部材の曲げモーメントについて計算結果を無次元化し、併せて 2 次元リングの等価部材の結果も図-8 にまとめた。この図から、この 2 つのモデルの結果は、まったく等価だといえる。図-8、図-9 から分かるように、単純な 3 次元化による 2 次元的な拘束条件、荷重条件では、いたずらに作業時間を増やすモデル化・計算となってしまう。

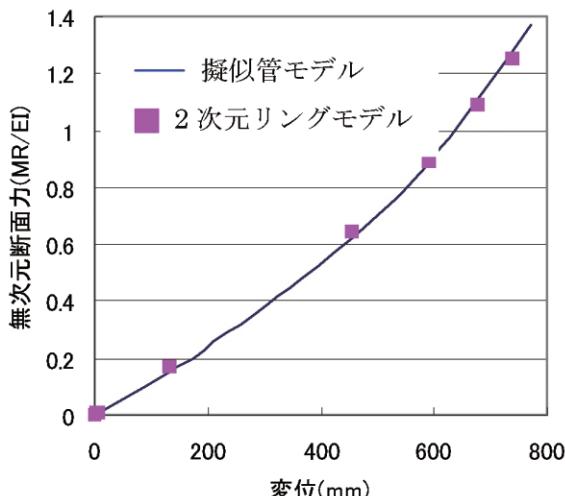


図-8 断面力-変位曲線

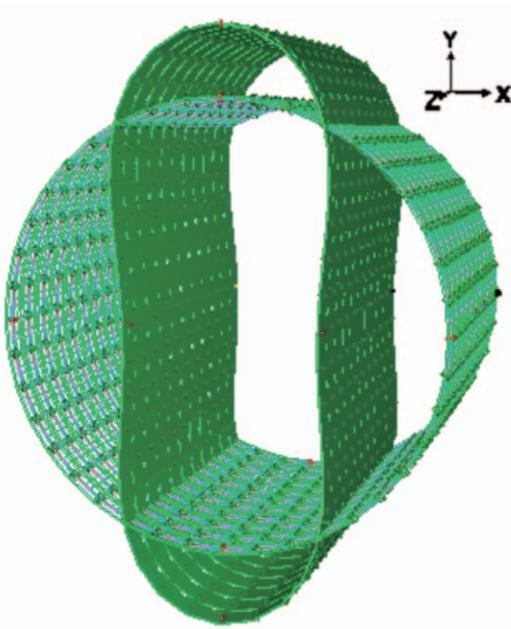


図-9 変形状態(実変位)

#### 5. 2 一端完全拘束モデル

##### a. 解析モデル

解析モデルは、5.1 節に用いた擬似管モデルの長さ方向の格子間隔を単純に 2 倍した 8m モデルを用いる。支点は、Z 方向原点位置周面回り全節点を全方向拘束、他端を 4.1 節で用いた拘束条件として設定する。荷重も同様に 2 次元リングモデルと同じ荷重をリング形成節点に載荷する。搅乱力は、部材両側から水圧をイメージして 3 角分布荷重を射影方向に載荷することで置き換える。

##### b. 計算結果

計算結果を以下に示す。

ここでは、図-10 の荷重-変位曲線から飛移りが発生していることがわかる。一端が完全固定であるため座屈荷重が大幅に上昇し一気に変形が進んだ。また、座屈直後の変形状態を図-11 に示している。変形自由な断面部分で、現実の構造物であれば飛移りが発生し端部要素が接触することになるが、計算上、交差した形状で収束解を得ている。

小さい変位での断面力の変化を詳細にチェックすることで座屈移行前後を推定することができる。

#### 6. 終わりに

幾何学的非線形解析の利用方法を主として計算概論、代表的な座屈解析として長柱問題、簡単な応用として管の座屈解析を紹介させていただいた。

基本的には、単純に大きな荷重を与えても座屈挙動は発生しないため、実際の偏心荷重となるような搅乱力が必要である。あとは、載荷ステップを細かくし収束解を得ていくことで座屈前後の釣合状態が得られる。

また、3次元として全体系を計算でき、管単体としての耐荷力、構造体としての耐荷力など、ケースに最適な条件を与えそれに対する厳密解を得ることが可能となる。そのため、性能設計へ積極的に取り入れられれば、工費削減にも繋げることが十分可能と考えられる。

本稿では、荷重制御による座屈解析を紹介した。そのため、変形後負領域に存在する解は得ることができない。今後、機会が得られれば、変位制御系の活用も併せて紹介したいと思う。

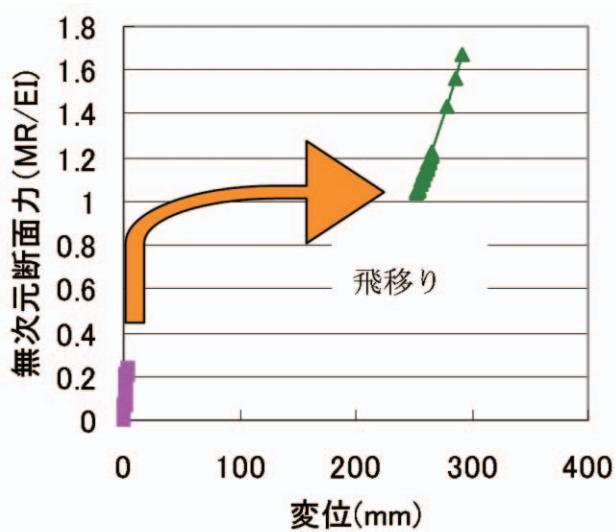


図-10 断面力-変位曲線

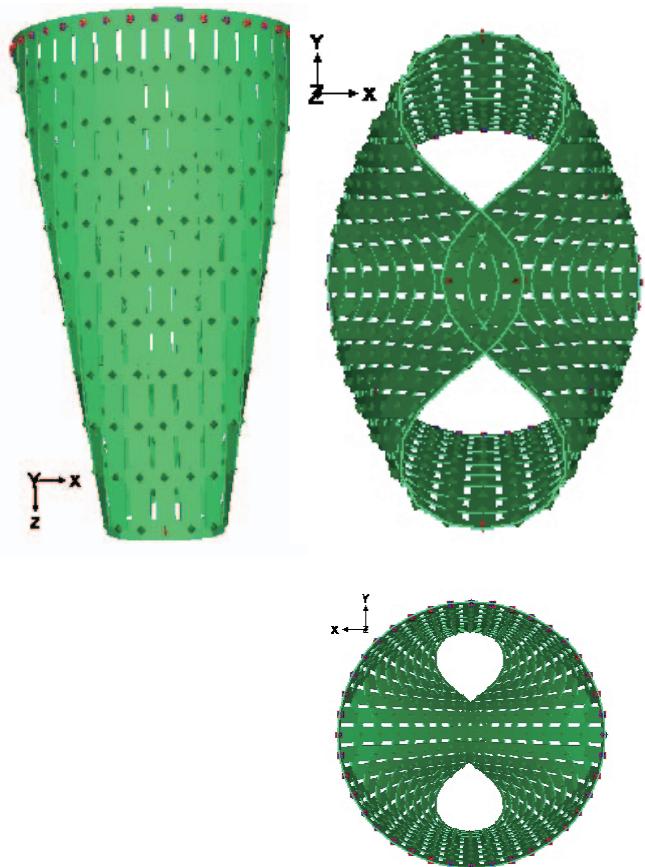
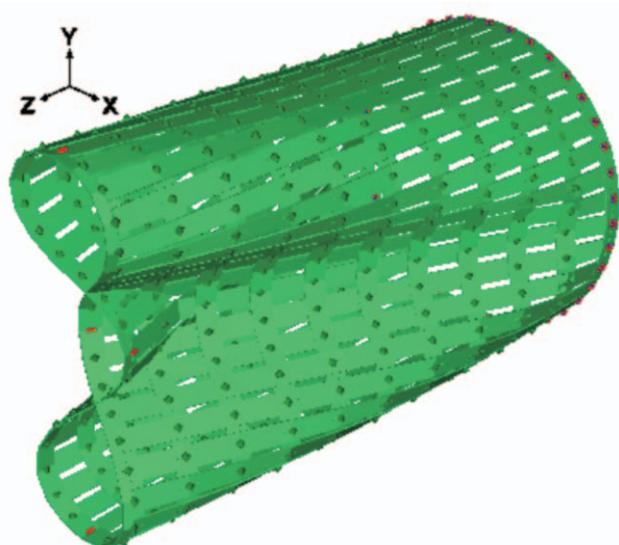


図-11 変形図(実変位)

## 参考文献

- 1) 後藤茂夫、羽根悟朗、田中達郎：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析、土木学会論文報告集 No. 238、pp.31-42、1975
- 2) 後藤茂夫、荒牧軍治、井嶋克志：要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析、構造工学論文集 Vol.37A、pp.315-328、1991
- 3) Iguchi, S., Goto, S., Ijima, K. and Obiya H.: Folding analysis of reversal arch by the tangent stiffness method, Structural Engineering and Mechanics, An International Journal, Vol. 11, No.2 pp.211-219, 2001
- 4) 門田和之、帯屋洋之、井嶋克志、井口真一、波照間弘之：接線剛性法の求解特性を用いた多分歧釣合系の追跡、KABSE 土木構造・材料論文集、第 21 号、2005 年 (掲載予定)
- 5) (株)フォーラムエイト:UC-win/FRAME (3D) 電子マニュアル、<ftp://ftp.forum8.co.jp/forum8lib/ucwin/frame3d/frame3d10600.exe>